解答速報

関西医科大学（一般前期）

数学

I　(1) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)-4ab=(ab-a-b-1)(ab+a+b-1)$

(2) $(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)=4ab \Leftrightarrow (a+1)(a-1)(b+1)(b-1)-4ab=0$

$\Leftrightarrow (ab-a-b-1)(ab+a+b-1)=0$

(ⅰ) $ab-a-b-1=0$

$\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=2$　これを満たし$a<b$となる整数の組は$(a,b)=(-1,0),(2,3)$

(ⅱ) $ab+a+b-1=0$

$\Leftrightarrow (a+1)(b+1)=2$　これを満たし$a<b$となる整数の組は$(a,b)=(-3,-2),(0,1)$

以上より $\boxed{ア}=4$, $\boxed{イ}=(2,3)$

II (1) $a_n=2+(n-1)d_a$とおく。　$a_{2k+1}=0$より、$2+2kd_a=0$　$d_a=-\dfrac{1}{k}$

$a_2=2+d_a=2-\dfrac{1}{k}$　　$a_{k+1}=2+kd_a=1$

(2) $b_n=(n-1)d_b$とおく。　$b_{k+1}=a_{k+1}=1$より、$kd_b=1$　$d_b=\dfrac{1}{k}$

$b_2=d_b=\dfrac{1}{k}$　　$b_{2k+1}=2kd_2=2$

(3) (1)　(2) より、$a_{n+1}=2-\dfrac{n}{k}$　, $b_{n+1}=\dfrac{n}{k}$　よって　$c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}c_n$　$c_{n+1}=\dfrac{2k-n}{n}c_n$

これにより

$$c_n=\frac{2k-1}{1}\cdot\frac{2k-2}{2}\cdot\frac{2k-3}{3}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\frac{2k-(n-1)}{n-1}=\frac{(2k-1)!}{(n-1)!(2k-n)!}$$

$$c_k=\frac{(2k-1)!}{(k-1)!\,k!}$$

$$c_{2k}=\frac{2k-1}{1}\cdot\frac{2k-2}{2}\cdot\frac{2k-3}{3}\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\frac{2k-(2k-1)}{2k-1}=\frac{(2k-1)!}{(2k-1)!}=1$$

(4) $$\frac{c_n}{c_{n-1}}=\frac{\dfrac{(2k-1)!}{(n-1)!(2k-n)!}}{\dfrac{(2k-1)!}{(n-2)!(2k-n+1)!}}=\frac{2k-n+1}{n-1}$$

$\dfrac{c_n}{c_{n-1}}>1$とおくと、$n<k+1$

これにより、$n=k,k+1$のときにc_nは最大となる。

(5) $$\sum_{r=1}^{2k}c_r=\sum_{r=1}^{2k}\frac{(2k-1)!}{(r-1)!(2k-r)!}=\sum_{r=1}^{2k}{}_{2k-1}C_{r-1}$$

二項定理より、$\displaystyle\sum_{r=1}^{2k}c_r=2^{2k-1}$

III (1) 1辺の長さが2の正三角形の内接円の半径に等しいので$OA=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}$

$=(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP})\cdot(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP})$

$=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}+3|\overrightarrow{OP}|^2$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 3+3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{1}{2}$ $\quad\because\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

(3) $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2+2(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA})$

左辺$=|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-3\overrightarrow{OP}|^2=|-3\overrightarrow{OP}|^2=9\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=3$

右辺$=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2+1$ $\quad\because$ (2)

よって$|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2+|\overrightarrow{PC}|^2=2$

(4) Oを原点とし$\mathrm{A}\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)$ $\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{1}{2}\right)$とする座標平面を考えても一般性を失わない。

この時$P\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta,\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$と置けるので

$\overrightarrow{PA}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta,-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$ $\overrightarrow{PB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$

$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\theta\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\theta\right)$

$=-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\cos\theta+\frac{1}{3}\cos^2\theta-\frac{\sqrt{3}}{6}\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^2\theta=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

以上より$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$の最大値は$\frac{1}{2}$　最小値は$-\frac{1}{6}$

Ⅳ　問題①

Cを表す式は$\sqrt{(x-3)^2+y^2}\cdot\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12$

$$\{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}=144\cdots（※）$$

$f(x, y)=\{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}-144$とおくと、

（※）$\Leftrightarrow f(x, y)=0$

(1) $f(-x, y)=\{(-x-3)^2+y^2\}\{(-x+3)^2+y^2\}-144$

$=\{(x+3)^2+y^2\}\{(x-3)^2+y^2\}-144=f(x, y)$

$f(x, -y)=\{(x-3)^2+(-y)^2\}\{(x+3)^2+(-y)^2\}-144$

$=\{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}-144=f(x, y)$

よって、Cはx軸およびy軸に関して対称である。

(2)　（※）に$y=0$を代入すると、$(x-3)^2(x+3)^2=144$

$x^2-9=\pm12$　xは実数なので、$x^2=21$　$x=\pm\sqrt{21}$　　　x軸との交点は、$(\pm\sqrt{21}, 0)$

（※）に$x=0$を代入すると、$\{9+y^2\}^2=144$

$y^2+9=12$　$y^2=3$　$y=\pm\sqrt{3}$　　　y軸との交点は$(0, \pm\sqrt{3})$

(3)　（※）を展開して、xについて整理すると、

$x^4+2(y^2-9)x^2+y^4+18y^2-63=0$

$x^2=X, y^2=Y$とおくと、

$X^2+2(Y-9)X+Y^2+18Y-63=0\cdots①$

Xは実数だから、

$\frac{D}{4}=(Y-9)^2-(Y^2+18Y-63)\geqq0$　$144\geqq36Y^2$

$Y\leqq4$となる。

このとき、$Y-9<0$となるので、

Xの2次方程式①は必ず正の数を解にもつ。

したがって、Yのみたす条件は、$Y\leqq4$

$y^2\leqq4$より、$-2\leqq y\leqq2$

(4) ①を解くと、

$X=-(Y-9)\pm\sqrt{144-36Y}$

$x^2=-(y^2-9)\pm\sqrt{144-36y^2}$

${x_1}^2=-(y^2-9)+\sqrt{144-36y^2}$　${x_2}^2=-(y^2-9)-\sqrt{144-36y^2}$とおくと

求める体積Vは、

$$\mathrm{V}=\int_{-2}^{2}\pi{x_1}^2dy-\int_{-2}^{-\sqrt{3}}\pi{x_2}^2dy-\int_{\sqrt{3}}^{2}\pi{x_2}^2dy=16\pi^2+10\sqrt{3}\pi$$

問題②

(1) ①と同じ

(2) ①と同じで$(\pm\sqrt{21}, 0)$

(3) $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$

$\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx$

この不定積分については

①上記の微分を用いて部分積分をする方法

②$t=x+\sqrt{x^2+4}$ と置換する方法

③$x=e^t-e^{-t}$と置換する方法

④$t=\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)$と置換する方法

など様々である。

$\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx=x\sqrt{x^2+4}+4\log\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)+\mathrm{C}$ (Cは積分定数)

(4) (※) を展開してyで整理すると

$y^4+2(x^2+4)y^2+x^4-18x^2-63=0$

$y^2=-(x^2+9)\pm\sqrt{36x^2+144}=-(x^2+9)\pm 6$

これにより、求める体積Vは、

$\mathrm{V}=\int_{-\sqrt{21}}^{\sqrt{21}}\pi y^2dx=2\pi\int_0^{\sqrt{21}}\left\{-(x^2+9)+6\sqrt{x^2+4}\right\}dx=\left(24\log\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}-2\sqrt{21}\right)$

講評

Ⅰ、因数分解から整数問題へとなる基本的な問題。確実に解いておきたい。

Ⅱ、(1)～(3)までは解いておきたい。(4)が解けるかが大きな差になったように感じる。

Ⅲ、似たような問題を解いたことがある受験生も多かったのではないでしょうか。

模範解答は(4)のみ座標幾何で解答したが、(2)から座標幾何でも解答できた。

Ⅳ、個別学力試験で選択問題は珍しく、面食らった受験生も多かったのではないか。

①に比べて②のほうがやや解答しやすい問題であったように感じる。

全体としての難易度は例年よりやや難化した。合格点は5割とした。